

TÉZISFÜZET

Katona János:

A számítógéppel támogatott mérnöki téri intelligencia
fejlesztésének elvei, követelményei, módszerei és eszközei

I. A KUTATÁS ELŐZMÉNYEI

A térszemléletről

„Több száz szakma és hivatás műveléséhez elengedhetetlen képességről van szó...” [Séra, Kárpáti & Gulyás, 2002]

Sok szakmában nagyon fontos a jó térlátás, a jó térszemlélet, a téri intelligencia. Például az építész vagy a gépész szakmacsoportokban alapvető kompetencia, hogy a (papír jellegéből adódóan) kétdimenziós tervrajzok, vetületek, metszetek, nézetek segítségével a mérnökjelöltek el tudják képzelni a háromdimenziós objektumokat, munkadarabokat. A rekonstrukcióval ellentétes kompetencia $\neg$ a homlokzatok, vetületek, metszetek készítése $\neg$ is elvárás: a térbeli objektumokról elegendő számú nézetben elegendő számú méretet megadni ahhoz, hogy a modell a tervről egyértelműen visszaállítható legyen. Ez a dokumentáció biztosítja, hogy a tervező elképzeléseit a kivitelezők hajszálpontosan végre tudják hajtani.

A kiváló térszemlélet jól jön a hétköznapiakban is: tájékozódás térkép alapján; navigáció; eligazodás egy többszintes bevásárlóközpontban; egy szoba berendezése; festéshez szükséges anyagmennyiség kiszámolása stb.

A térszemlélet fejleszthető. A térszemlélet fejlesztésében a hagyományos szemléltető eszközök (papírmockok, drótvázmodellek, fából vagy műanyagból készült modellek, valódi gépelemekből készített metszetek stb.) mellett egyre nagyobb hangsúlyt kap egy univerzális eszköz is, a számítógép. A számítógép képernyője ugyan kétdimenziós, de a perspektíva mellett nagyon jó térélményt ad a mozgás. A modern programok esetében a mozgás interaktív, tehát a tanulók tudják a nézőpontot változtatni (a modellt „forgatni”, „közelíteni-távolítani”); valamint a mozgás és a modell paramétereit vezérelni. Van olyan szoftver, amelyik egy nagyszerű ötlettel összekapcsolja a számítógépes és a valódi, kézzelfogható modelleket: a számítógéppel konstruált poliéder hálóját egyetlen egérgérintéssel elkészíthető, kinyomtatható, majd az ollóval kivágott hálóból valódi papírmockot hajtogatható, ragasztható.

Szintén figyelemreméltó az úgynevezett anaglif technika, amikor egy speciális szemüveg segítségével mást lát a jobb és mást a bal szemünk, ezzel biztosítva a térélményt. Ennek modern változata egy speciális szemüveggel létrehozott „virtuális valóság”. Ebben az esetben a viselő két szeme előtt két kis monitor kap helyet, ezért a bal szem és a jobb szem más-más képet lát, így jön létre a térélmény.

Hasonlóan modern eszköz a 3D-nyomtató, amellyel fizikai valóságban, kézzelfogható formában láthatjuk viszont a számítógépen megtervezett térbeli modellünket.

A térszemlélet fejlesztéséről

A műszaki felsőoktatásban a térszemlélet fejlesztésének leggyakoribb módszerei a következők: vetületek készítése szabadkézzel, szerkesztéssel vagy fotózással; a vetületeken szerkesztési műveletek végrehajtása; szelvények, metszetek és vetületek készítése; láthatóság ábrázolása, rekonstrukció; 3D-modellezés. Ez utóbbi történhet CAD-szoftverrel, 3D-nyomtatással vagy makettezéssel is. Gyakori tevékenység a téri elemek mennyiségi jellemzőinek a számítása:

hosszúságok, szögek, felületek felszínének és testek térfogatának meghatározása, a súlypont koordinátáinak kiszámítása. Ezek a tevékenységek nem köthetők egyetlen tantárgyhoz és egyetlen szemeszterhez.

Tekintsük először az ábrázoló geometria tárgyat, amit a műszaki felsőoktatásban változatlanul tanítanak. Mivel az egyes témakörök eltérő hangsúlyt kapnak, ezért a tantárgy neve lehet ábrázoló geometria, műszaki ábrázolás, műszaki rajz, géprajz, mérnöki ábrázolás vagy éppen építészeti ábrázolás. A témakörök: vetületek, metszetek, Monge-féle kétképsíkos ábrázolás, merőleges és ferde axonometria, perspektívák. Ezek a tananyagrészek igen hatékonyan fejlesztik a térszemléletet.

Az építészképzésben további kötelező tárgyak is vannak, amelyek jól fejlesztik a térszemléletet is: szabadkézi rajz, geodézia, térinformatika, alkalmazott vizuális ismeretek, alkalmazott vizuális technikák, építészeti modellezés és a matematika. A szabadon választható tantárgyak közül itt említendő a tér- és formatan, a generatív építészeti modellezés, az építészeti

fotogrammetria és a „görbék és felületek az építészetben” kurzusok.

A matematika 1. tantárgy anyaga analízis, de ennek keretében is tudunk térszemlélet-fejlesztő feladatot feladni, például a geometriai szélsőérték témakörében.

Példafeladat 1.: Egy 1 méterszer 1 méteres lemezből szeretnénk felül nyitott dobozt készíteni. A dobozt úgy készítjük, hogy a sarkoknál kivágunk a lemezből négy ugyanakkora négyzetet, és a keletkezett füleket felhajtjuk a lemez síkjára merőlegesen. Hogyan válasszuk meg a méreteket, hogy a doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen?

Példafeladat 2.: Egy téglatest alakú doboz egy csúcsba futó éleinek hossza 'x', 'x' és 'y' ($y > x$). A doboz térfogata 0,3 köbméter. A dobozt 4 darab zsineggel szeretnénk átkötni úgy, hogy az 'y' hosszúságú éleken a zsineg kétszer menjen át; az 'x' hosszúságú éleken viszont csak egyszer menjen át. Hogyan válasszuk meg az 'x' és az 'y' értékét, hogy a lehető legkevesebb zsinegre legyen szükség?

A modern technika egyre többet segít a mérnököknek is a téri feladatainak a megoldásában. Ennek illusztrálására megemlíthetjük, hogy a legtöbb CAD rendszer alapvető funkciói közé tartozik az

ütközésvizsgálat. Például egy épületben futó vízcsövek, gázcsövek, elektromos vezetékek, szellőzőrendszerek és egyéb gépészeti rendszerek számítógépes megtervezésekor a szoftver előre jelzi az egyes elemek kereszteződésekor fellépő esetleges ütközéseket.

A mérnökképzésben tehát nem csak a térszemlélet fejlesztése a feladatunk a hagyományos eszközökkel, hanem a hallgatók megismertetése a modern technika adta lehetőségekkel is.

Informatikai eszközökkel támogatott térszemlélet-fejlesztés

„A térgeometriai szerkesztések csak gondolatban végezhetők el.” [Vermes, 2005]

A számítógép kivételes, semmihez sem hasonlítható erejét univerzionalitása adja. Olyan szemléltetőeszköz, amely egyesíti a diavetítőt, az írásvetítőt, a filmvetítőt, a magnetofont, a lemezjátszót, és a videómagnó funkcióit.

A pedagógiai cél szerint a komputer kísérleti eszköz is lehet, szabadon változtathatjuk a bemenő paramétereket és megfigyeljük a végeredményt. Ha akarjuk, vizsgálható

eszköz; ha akarjuk feladatgenerátor. Az alábbi táblázatban pontokba foglaltam, hogy az oktatási folyamat különböző szervezeti kereteiben milyen funkciókat láthat el egy modern számítógép. A számítógépet itt gyűjtőfogalomnak használjuk: okostelefon, tablet, notepad, laptop, desktop, stb. lehetőleg internetkapcsolattal.

A számítógép lehetséges szerepei a tanítási-tanulási folyamatban:

- Az oktató előkészítő munkáját segítő eszköz
 - pontos és dinamikus szerkesztőeszköz
 - dinamikus ábrakészítő eszköz
 - prezentáció készítéséhez használható eszköz
 - feladatgenerátor
 - adatbázis, információforrás
 - oktatásmenedzser
- Az oktató órai munkáját segítő eszköz
 - dinamikus modellező, kísérletező eszköz
 - szimulációs rendszer szemléltetéshez és kísérletezéshez
 - pontos és dinamikus szerkesztőeszköz
 - multimédiás tudásközvetítő, ismeretközlő, vetítőeszköz
 - adatbázis, információforrás
 - a számonkérés eszköze

- A hallgató órai munkáját segítő eszköz
 - dinamikus modellező, kísérletező, szimulációs rendszer
 - problémamegoldási segédeszköz
 - adatbázis, információforrás
 - pontos és dinamikus szerkesztőeszköz
- Az önálló tanulást segítő eszköz
 - multimédiás tudásközlő, ismeretközlő eszköz
 - problémamegoldási segédeszköz
 - dinamikus modellező, kísérletező, szimulációs rendszer
 - pontos és dinamikus szerkesztőeszköz
 - tudásszintmérő eszköz
 - adatbázis, információforrás
 - tanulásmenedzser

Bár a számítógép a tanulási-tanítási folyamat minden fázisában használható eszköz, de véleményem szerint nem pótolhatja a személyes pedagógiai ráhatást, és nem helyettesítheti, csak kiegészítheti a többi jól bevált eszköz használatát.

A szimulációs oktatási és vizsgálati módszer kifejezetten olyan terület, amelyet komputer nélkül nagyon körülményes lenne művelni. A számítógépes szimulációt az oktatásban a kísérletek elvégzése helyett

alkalmazzuk, ha a kísérlet túl veszélyes lenne, ha túl drága lenne, ha a megfigyelendő objektumok túlságosan kicsik vagy nagyok, ha a folyamat túl lassan vagy túl gyorsan játszódik le, vagy ha nem állnak rendelkezésre a megfelelő eszközök.

A realisztikus és a problémaorientált tanulási irányzat elemeinek felhasználása

Az utóbbi időben sok új tanítási irányzat bukkant fel, ezek többségét jelenleg is tesztelik, finomítják. Ilyen irányzat például a realisztikus vagy a problémaorientált oktatás. Igyekeztem ezen az irányzatok pozitív elemeit a tanításomba beépíteni.

A problémaorientált és a realisztikus oktatási módszerekkel kapcsolatban több szerzőhöz hasonlóan én is jó tapasztalatokat szereztem. Úgy tűnik, hogy a hallgatók figyelmét az új ismeretek közlésével nehéz lekötni. Ezért érdemesnek találtam egy gyakorlati problémát felvetni, és amikor a megoldás során elakadtunk - egy új problémával találtuk szemben magunkat - már szívesebben hallgatták meg a probléma megoldására szolgáló új módszereket.

Az analógiás gondolkodás fejlesztése

„Bármilyen területen szerzett ismereteink tárgyi tudásból és gondolkodási készségből állnak. A gondolkodási készség a megszerzett tudás alkalmazási képessége. Ilyen készség nincs bizonyos mérvű önálló gondolkodás, eredetiség és alkotóerő nélkül.” [Pólya, 1985]

Kijelenthetjük, hogy nincs két egyforma építészmérnöki vagy építőmérnöki feladat. Még a szabványterveket is a telek paramétereire, elhelyezkedéséhez, tájolásához stb. adaptálni kell. Nem tudjuk a hallgatókat a szinte végtelen sok esetre felkészíteni. Sok-sok példát, eljárást megmutathatunk, és bízhatunk abban, hogy analóg módon majd a jövőben felmerülő problémákra is megtalálják a válaszokat.

Az analógiák révén a mérnökök képesek lesznek új összefüggéseket felismerni. Ez nemcsak a problémamegoldásban, hanem a kreatív tervezésben is kulcsszerepet játszik. Az analógiák a tanulást is megkönnyítik, és a hétköznapi életben is hasznosulnak.

Elősegítik a gyorsabb alkalmazkodást és a komplex helyzetekben való eligazodást is. [Nagy 2006]

Az analógiás gondolkodás fejlesztésének egy nagyszerű lehetősége a sík-tér analógiák megmutatása, tanítása, mivel az analógiás gondolkodáson túl ezek remekül fejlesztik a téri intelligenciát is. Nagyszerűen használható [Fitos 1984], ami még egy harmadik kompetenciát is fejleszt: a konstruktív problémamegoldási képességet.

Új típusú, újszerűen kombinált oktatási segédletek, beválásuk

A szerkesztések önálló tanulása során az egyik legnagyobb nehézség abból származik, hogy a kész ábrán a hallgatók nem tudják, hogy az egyes lépések milyen sorrendben következnek egymás után, és hogy melyik lépés miért helyes. Ennek az áthidalására három módszert is alkalmaztam, a dinamikus geometria rendszereknek „a szerkesztés visszajátszása” funkcióját, a CAD rendszereknek a fóliakezelését, és készítettem oktatóvideókat is.

A Cabri3D DGS előnyének mutatkozott rugalmassága, sokoldalúsága, egyszerűsége az oktató és a hallgatók számára egyaránt. Nagyon könnyen, intuitívan kezelhető, használatát gyakorlatilag nem is kell tanulni, ugyanakkor a szerkesztéseket igen gyorsan, és akár „térben” is el lehet végezni a segítségével. Az oktató számára nem kellenek különböző célszoftverek, egyetlen szoftverrel meg tudja oldani a szemléltetést és az ábrakészítést, a kész szerkesztések egyszerűen exportálhatók például E-learning tananyagokba.

A kész objektumok és a kész transzformációk segítségével pillanatok alatt elkészül a szerkesztés, óra közben is remekül lehet rögtönözni vele. Hátránya, hogy nem ingyenes, és hogy nem programozható, tehát a menüje nem bővíthető. Megemlítendő még, hogy mérnöki dokumentáció készítésére alkalmatlan, de hát nem is ezzel a céllal íródott.

Az AutoCAD legfőbb előnye, hogy professzionális, tehát a gyakorlatban előforduló mérnöki feladatok igen nagy részét meg lehet oldani vele; a tervezéstől a gyártásig végig kíséri a létrehozott termék életét. A műszaki

gyakorlatban tulajdonképpen szabványnak tekinthető, ismerete a mérnökök számára gyakorlatilag megkerülhetetlen.

Előnye továbbá, hogy ha sikerül a háromdimenziós modellt felépíteni, akkor onnantól a dokumentáció már automatikus: készen kapjuk a nézeteket, az axonometrikus és perspektív vetületeket; anyagok és fények használata esetén az árnyékokat és a látványterveket. Könnyen készíthetünk vele mérnöki szabvány szerinti metszeteket, áthatásokat, méretezéseket. Hátránya az igen magas ára, a magyar fordítás változó minősége, valamint a bonyolultsága.

A szemléltetésen kívül mindkét 3D modellező szoftver jól használható problémamegoldásra is. Olyan modellek is „legyárthatók”, amelyeket a leírás alapján el sem tudunk képzelni, vagy amelyekről nehéz szabadkézzel jó ábrát rajzolni. A kezdeti feltételek változását követi a modell változása, ezért egy szerkesztéssel számtalan konfiguráció vizsgálható.

A Cabri3D és az AutoCAD segítségével létrehozott oktatóvideók legfőbb előnyének az bizonyult, hogy önálló

tanulásra kifejezetten alkalmas voltak. Például akik elmulasztották az előadást, vagy nem jegyzeteltek rendesen, később könnyen pótolhatták az anyagot. Hátrányuk, hogy nem paraméterezhetőek, tehát azzal az egy konkrét adatfelvétellel dolgoznak, amelyeket én rögzítettem.

További hátrányuk, hogy a hallgatók passzív szemlélői a történéseknek, bár ugyanez a megállapítás az előadásokra, sőt a mostani óraszámok és tanulói létszámok mellett szomorú módon a gyakorlati órák egy részére is igaz. Ezeket a hátrányokat tompítani tudjuk, ha az oktatóvideókat a többi eszközzel kombinálva alkalmazzuk.

A dinamikus geometria szoftverek és a CAD-rendszerek használatának irodalma bőséges, de én hiányoltam belőlük a komplex látásmódot, illetve az építészmérnöki és építőmérnöki sajátosságok elemzését.

II. ÚJ TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK

[Tézis 1] Megfogalmaztam az építész- és építőmérnökök számára szükséges téri képességek (téri intelligencia) követelményeit

Építészmérnökök, építőmérnökök számára igen fontos a térlátás. A téri intelligencia a térlátás képességét magába foglalja, de jóval több annál. A mérnököknek ezzel kapcsolatban az alábbi kompetenciákra kell szert tenni (nem fontossági a sorrend, mind az 5 képesség egyaránt kívánatos):

- a térbeli alakzatok alakjának, nagyságának, arányainak, helyzetviszonyának pontos elképzelése,
- a látott vagy elképzelt alakzatoknak a geometria törvényeire épülő egyértelmű ábrázolása, dokumentálása,
- az egyértelműen ábrázolt alakzatok helyes rekonstrukciója,
- a különböző térbeli problémák konstruktív megoldása, a megoldás dokumentálása 3D-modellező eszközzel (CAD programmal),

- parametrikus 3D formák és objektumok kreatív létrehozása, dokumentálása 3D-képes szoftverrel.

Mindezeket a képességeket a „sima” térlátástól megkülönböztetve **mérnöki térszemléletnek** vagy mérnöki **téri intelligenciának** nevezhetjük. Kutatásaim, fejlesztéseim, kísérleteim egyik iránya, hogy miképpen lehet ezeknek a kompetenciáknak az elsajátítását informatikai eszközökkel is segíteni.

Az utolsó két pont fontosságának aktualitását az is adja, hogy bizonyos típusú építkezéseknél kötelezővé tették a BIM (Building Information Modeling, Épületinformációs modellezés) használatát. A rendelet hivatalos megnevezése: „Az építési és közlekedési miniszter 31/2024. (VIII. 22.) ÉKM rendelete az építményinformációs modell (BIM) alapú tervezés és műszaki megvalósítás feltételrendszeréről.”

Ez a jogszabály praktikusán olyan 3D-modellező program használatát írja elő, amelyben az épülethez kapcsolódó minden információ megjeleníthető, és amely adatok végig kísérik az épület teljes életciklusát.

Egy olyan rendszert dolgoztunk ki a mérnöki téri intelligencia fejlesztéséhez, ami könnyen beilleszthető volt a mérnökképzés oktatásába. [1] [2] [3] [4] Ennek a matematikadidaktikai eszközrendszernek a domináns összetevői a probléma-orientált és empirikus matematikatanítás didaktikai elvére és az analógiára épülő tananyag-szervezés, valamint a belső differenciálás módszerének számítógéppel támogatott megvalósítása. A kifejlesztett eszközrendszer fő jellemzői:

- Spirális felépítés. Az ismeretek később újra felbukkannak, de akkor már magasabb szinten.
- Az analógiák tudatos, széleskörű használata.
- Teljesség. A segédanyagok lefedik az egész szemeszter tananyagát.
- Sokszínűség. Többféle teljes segédlet felajánlása, amelyek mindegyike többféle munkamódszerrel feldolgozható. Legfontosabb, hogy önálló tanulásra is alkalmas legyen.
- Gyakorlatorientáltság. Az anyagban az érdeklődés felkeltése és a problémafelvetés megelőzi az új ismeretek közlését. A tananyag lehetőség szerint szorosan kapcsolódik valamilyen gyakorlati problémához.

- Problémaorientáltság. Az általános térszemlélet fejlesztése és a térgeometria problémák megoldására vonatkozó kompetencia növelése hangsúlyosabb a szerkesztési algoritmusok megtanulásánál.
- Lehetőség a differenciálásra. A segédanyagok lehetővé teszik a belső differenciálást: a jó térszemléletű mérnökjelölt hallgatók tartalmas, sikeres és hasznos munkát tudnak végezni; ugyanakkor a fejlesztésre szorulóknak is eredményesen tudunk segíteni
- A segédanyagok ingyenesek, könnyen terjeszthetők; hardverigényük nem magas; nem kívánják meg nehezen elérhető szoftverek telepítését.
- Nyitottság. Mindig megemlítem az aktuális anyaghoz kapcsolódó általánosítási lehetőségeket, az éppen tanultakon túlmutató problémákat.
- A manuális készségek és a számítógépes modellezés párhuzamos fejlesztése.

[Tézis 2] Változatos feladatokkal teli térszemlélet-mérő tesztet állítottam össze

Az előző pont szerint egyik fő feladatomnak tekintem az építészmérnökök és építőmérnökök téri intelligenciájának fejlesztését. A fejlesztésre irányuló

erőfeszítések hatékonyságát nyilvánvalóan mérni kell. Egyik méréstípus a zárthelyi dolgozatok kiértékelése, de egy ilyen feladatsort csak egyszer lehet alkalmazni, mert a hallgatók között gyorsan elterjed. A másik méréstípus a többször alkalmazható tesztek kitöltése.

Az oktatási kísérleteknél bevett gyakorlat, hogy felmérjük a hallgatók tudását a kurzus előtt, majd ugyanazzal (vagy nagyon hasonló) teszttel mérjük a fejlődést a kurzus elvégzése után. Mindezeket meg tesszük a kísérleti és a kontrollcsoportoknál egyaránt.

A probléma az volt, hogy a fiatalabb generáció figyelmét egyre nehezebb lekötni, monotoniatűrésük romlik. Éppen ezért nem fordítottak kellő figyelmet a tesztek kitöltésére.

A hagyományos térszemlélet-mérő tesztek legtöbbje csak azonos típusú feladatból állt. Éppen ezért olyan térszemlélet-mérő tesztet állítottam össze, amelynek minden feladata más-más típusú. A teszt vázlatos leírása, példafeladatok és a felmérések használata során szerzett tapasztalatok összegzése megtalálható például ezekben a publikációkban [6] [7]

[Tézis 3] Kimutattam, hogy a mérnökképzésben a dinamikus geometria szoftverek különösen alkalmasak téri problémákkal kapcsolatos szemléltetésekre, kísérletezésekre, a megoldási módszerek megtalálására

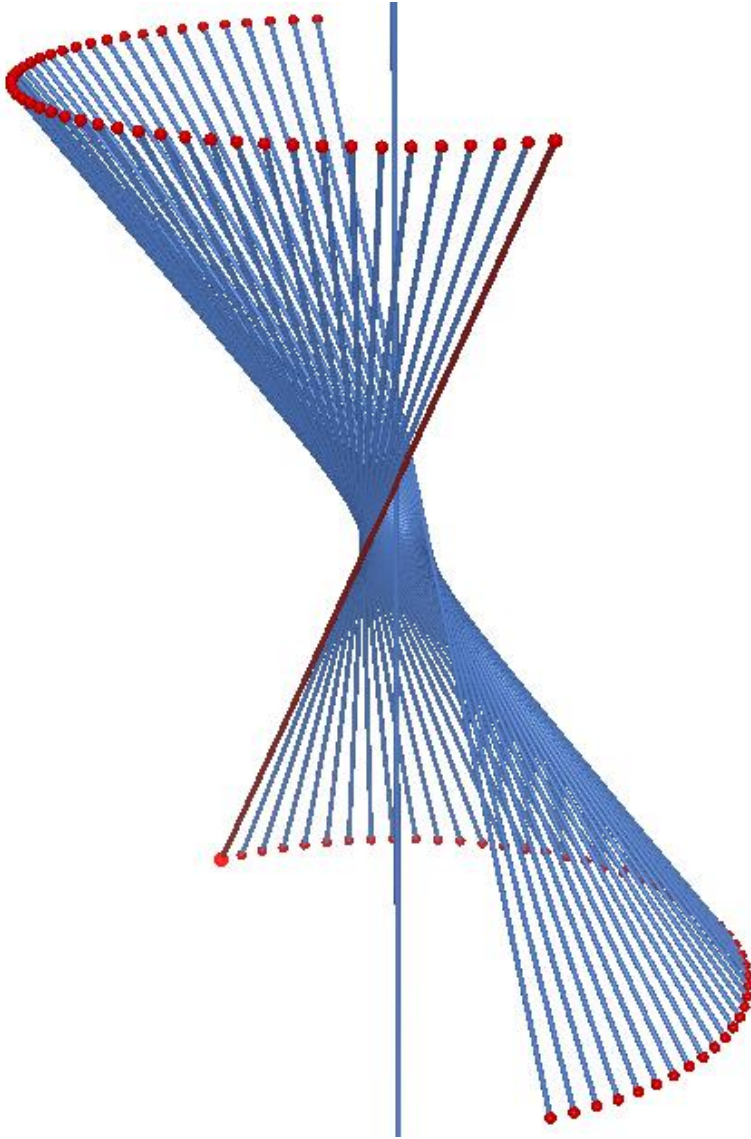
A számítógépet feltalálása óta használják problémamegoldásra. Az első, számítógép segítségével bizonyított tétel a négyszín-tétel volt, 1976-ban. Ebben a bizonyításban több hibát találtak, amelyeket 1996-ra sikerült kijavítani, de az esetek nagy száma miatt (633 eset) a bizonyítás még mindig komputert igényel.

Ugyancsak számítógéppel bizonyították be 2010-ben azt a tételt, hogy a Rubik-kocka bármelyik összekevert állásából legfeljebb 20 forgatással kirakható.

A számítógép gyors műveletvégző képességét korábban leginkább a számelméletben és az analízisben tudták jól kihasználni. Például az alábbi két, magyar nyelven is elérhető, kifejezetten a számítógépes problémamegoldással foglalkozó könyvben egyetlen geometria feladat – pláne térgeometria feladat – sincs: [Nievergelt, Farrar & Reingold, 1977] [Fried & Simonovits, 2005]

Éppen ezért vezettem be az oktatásba a dinamikus geometria szoftvereket, amelyek fő erejét a (nevéből adódóan nem meglepő módon) a dinamikus jellege adja. A szoftver megjegyzi a szerkesztés menetét, és a közben keletkezett kényszereket végig megtartja. *Ilyen kényszer például, hogy egy egyenes áthalad egy ponton és merőleges egy adott síkra.* Ha most az alapalakzatok helyzetét változtatjuk, az egész szerkesztés követi a változtatásokat. Ily módon gyakorlatilag végtelen sok konfigurációt vizsgálhatunk egyetlen szerkesztéssel.

Amióta a hardver feltételek ezt lehetővé teszik, a dinamikus geometria programok térbeli (3D) szerkesztésekre is alkalmasak. Ez újabb minőségi ugrást jelentett a papír-ceruzás szerkesztésekhez képest. Mivel a szerkesztés dinamikus, így könnyedén lehet a 3D-objektumok arányait és egymáshoz viszonyított helyzetüket egyetlen szerkesztéssel vizsgálni, ami különösen jól jön az építészeti koncepciótervek létrehozásakor. Ezenkívül lehetőségünk nyílik a különböző térgeometriai problémák megoldása során is a komputer segítségét igénybe venni. [5] [3] [7]



1. ábra. Dinamikus geometria szoftver működés közben:
egy adott hosszúságú szakasz forgatása egy olyan tengely
körül, amelyik nem párhuzamos a szakasszal.
(A parabolikus hiperboloid tehát vonalfelület.)



2. ábra. Vinarium kilátó Lendava, Szlovénia



3.ábra. A Heller-Forgó hűtőtoronynak emléket állító kilátó. Millenáris park, Budapest

Hogy a dinamikus geometria szoftverek magyarországi elterjedését segítsem, lefordítottam magyarra az alkalmazás komplett menürendszerét, a súgóját és a felhasználói kézikönyvét. A 3D-verzió magyar nyelvű kézikönyve letölthető innen (impresszum az 5. oldalon):

<https://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/c3dv212/user-manual-hun.pdf>

A 2D-verzió kézikönyve (impresszum a 6. oldalon):

https://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/cabri2plus140/Man_hu_PDF1.pdf

[Tézis 4] Többször is sikerrel teszteltem egy általam létrehozott komplex tanulási környezetet, ahol a hangsúly a téri problémák megoldásán volt

A CAD programok hétköznapivá válásával a hagyományos körzős-vonalzós szerkesztések jelentősége csökken, így kisebb hangsúllyal érdemes ezekkel foglalkozni. A felszabaduló időben érdemes a hangsúlyt a téri problémák megoldására fordítani.

A térbeli szerkesztések nem végezhetők el papíron, ehhez nyilvánvalóan 3D-képes szoftvert kell használnunk. Ha fejben már összeállt a megoldás menete, akkor a szerkesztés már elvégezhető a CAD programokkal, de a probléma szemléltetéséhez, a feladat lényegének megértéséhez, a kísérletezéshez, az eredmény megsejtéséhez sokkal alkalmasabbak a dinamikus geometria programok.

A számítógépes modellezési eszközrendszer használatával tehát kibővül a felvethető problémák köre és fejlődik a hallgatók problémamegoldó potenciálja. A számítógépes modellek jól hasznosíthatók a térgeometriai problémák felvetése, elemzése, megoldása, diszkussziója közben is.

A komplex tanulási környezethez tehát hozzátartoznak a digitális eszközök is: aktív tábla, 3D-nyomtató, ezek meghajtásához CAD-programok, dinamikus geometria szoftverek. Ide sorolandók a számítógépes dokumentumok, fényképek, grafikák, prezentációk, oktatóvideók. A számítógépek segítségével az ábrák megmozdulnak, a térbeli alakzatok különböző

nézőpontokból történő mutatása, „forgatása”, „közelítéstávoltítása” (idegen szóval zoomolása) fokozza a térélményt.

Mivel a levelező képzéseink kontakt óraszám a nappali képzések óraszámának körülbelül a negyede, a levelező hallgatók felkészítéséhez ez az összetett, sokrétű oktatási környezet gyakorlatilag elengedhetetlen. [2] [3] [4] [6] [7]

Ennek a komplex tanulási környezetnek a népszerűségét mutatja, hogy az Oktatói Munka Hallgatói Véleményezése (OMHV) során a legtöbb pozitív visszajelzést az internetre nyilvánosan, vagy az Óbudai Egyetem zárt E-learning rendszerébe feltöltött digitális anyagokra (különösen az oktatóvideóimra) kaptam. Ezek között szép számmal vannak lektorált oktatási anyagok, például (a Bölcskei Attilával közösen fejlesztett) *Ábrázoló geometria példákon keresztül*:

<https://cadtanfolyam.hu/geometria/>

Ábrázoló geometria példákon keresztül 2. rész:

<https://cadtanfolyam.hu/geometria2/>

[Tézis 5] Az előző tézisben leírt kísérletek tapasztalatai alapján ajánlásokat tettem a mérnöki téri intelligencia fejlesztésére vonatkozóan

Általánosságban elmondható, hogy a természettudományos tárgyak – különösen a matematika – tanításának pedagógiája, pszichológiája jelentősen különbözik más tudományterületek oktatási módszereitől. [Ambrus 2004] [Skemp 2005] Nem elég a tananyagot olvasni, memorizálni, az összefüggéseket meglátni, a lényegeset a lényegtelenről elkülöníteni stb. Szükséges még az önálló gyakorlás, problémamegoldás stb. Ezek az erőfeszítések nem hagyhatók el, tehát nekünk oktatóknak azt kell elérni, hogy a hallgatók motiváltak legyenek ezen erőfeszítések megtételére.

A matematika didaktikája jól kidolgozott, de az új lehetőségek még nincsenek teljes mértékben kihasználva. [Csánk, Göndöcs 1966] [Kárteszi 1972] A XX. század végén a számítógép, mint univerzális eszköz jól bekapcsolódott a matematika oktatásába, de a térgeometria magas hardverigénye miatt a komputer csak az utóbbi 3 évtizedben vált meghatározóvá a geometria oktatásában. Kiváló eszköz ehhez az elvileg minden

iskolában rendszeresített aktív tábla, a hozzá való szoftverekkel.

Egyrészt tehát az új eszközök potenciálja miatt van lehetőségünk paradigmát váltani, másrészt a váltás szükséges is: az újabb generációk (z, alfa, béta) megváltozott attitűdjéhez kell igazodnunk. Ehhez tettem ajánlásokat, kifejezetten az építészmérnöki, (tágabb értelemben a műszaki felsőoktatási) gyakorlat számára például a következő cikkekben: [6] [7]

[Tézis 6] Beépítettem az Infrastruktúra-építőmérnöki mesterképzés „Matematika MsC” tantárgyába a magasabb-dimenziós és nem-euklideszi geometriák egyes elemeit, fejlesztve ezzel az analógiás gondolkodást és az általános problémamegoldó képességet

A CAD-rendszerek vektorgrafikával dolgoznak. Míg a (például a fotók digitalizálásakor használt) pixelgrafika a nagyításkor torzulhat, „pixelesedik”, addig a vektorgrafikával ez nem fordulhat elő. A vektorgrafika alapja ugyanis az analitikus geometria.

Például az alapsíkon elhelyezkedő kör megjelenítése esetén a számítógép nem az adott kör kerületi pontjait tárolja el, hanem csak három valós számot: a középpontjának a két koordinátáját és a sugarát.

Ebből következően a szoftver bármikor, bármilyen nagyítás esetén újra tudja generálni a kerületi pontokat, minőségromlás nélkül. (Megjegyzendő, hogy háromdimenziós esetben a középpont koordinátáin és a sugáron kívül tárolnunk kell még a kör síkjának térbeli elhelyezkedését is valamilyen módszerrel.)

Az analitikus geometria tehát a CAD rendszerek esetében is megkerülhetetlen. További előnye, hogy könnyen általánosítható magasabb dimenziókra, hiszen „csak” egy újabb koordinátát kell a meglevőkhöz hozzáadni. (Például egy egységnyi oldalhosszúságú kocka [amelynek egyik csúcsa az Origó, oldalai pedig a tengelyeken fekszenek,] nyolc csúcsának koordinátái 3 dimenzióban – a három koordináta közül a pontosvesszőket elhagyva – 000, 100, 010, 011, 001, 101, 011 és 111. Négy dimenzióban 16 csúcs lesz, az előző nyolc csúcs koordinátáit használva, mindegyikhez

hozzáillesztünk még egy koordinátát, a nullát vagy az egyet: 0000, 0001, 1000, 1001, 0100, 0101 stb.)

A dolog megfordítva is igaz: a Descartes-féle koordináta-rendszerben, bármely két koordinátatengely által kifeszített síkra való merőleges vetületeket nagyon könnyű a koordináták elhagyásával előállítani. *Például egy háromdimenziós objektum xy-síkra való merőleges vetületét egyszerűen megkaphatjuk úgy, hogy a „z” koordinátákat egyszerűen elhagyjuk (vagy nullára cseréljük).* Négydimenziós objektum kétdimenziós vetületénél két koordinátát kell elhagyni. Mivel a CAD-rendszerek szabadon programozhatók, ezért könnyen lehet velük négydimenziós alakzatokat a vetületeikkel szemléltetni.

A magasabb dimenziók újabb alkalmazása, amikor a gömbfelület geometriáját vizsgáljuk. A gömbfelület gyakorlatilag kétdimenziós, de a gömbi geometria leírása sokkal könnyebb, elegánsabb, ha azt a háromdimenziós térbe ágyazva, a háromdimenziós eljárásokat használva végezzük el.

Ehhez kapcsolódik, hogy a Föld gömbhöz közeli alakja miatt az építészmérnökök és építőmérnökök legalább kétféle geometriával találkoznak tanulmányaik során: az euklideszi és a gömbi geometriával.

Itt adódik egy újabb általánosítási lehetőség, meg lehet említeni egyéb nem-euklideszi geometriákat is. Tapasztalatom szerint a legnagyobb érdeklődés a Bolyai-Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometriát kísérte (történeti okokból), illetve a projektív geometriát, mert a centrális vetítést a gyakorlatban is széleskörűen lehet alkalmazni.

Mindezek célja lehet a mérnökök látókörének bővítése, az érdeklődés fenntartása, az órák színesítése; de elsődlegesen az analógiás problémamegoldó gondolkodás fejlesztése.

Az előzőekben láthattuk, hogy a magasabb-dimenziós objektumok merőleges vetülete könnyen előállítható. Ebben a cikkben nem a merőleges, hanem a centrális vetítéssel, annak a magasabb-dimenziós kihívásaival foglalkozunk, a szemléltetéshez még egyfajta „láthatóságot” is definiálhatunk. [8]

[Tézis 7] Gyakorlatközelibbé tettem az építész- és építőmérnöki matematika oktatást. Szép példa erre, amikor a rúd-csukló szerkezetek merevségét gráfelméleti úton vizsgáljuk. A gráfok alkalmasak közműhálózatok tervezésének segítésére is

A gyakorlatközeleli matematika egyik izgalmas és szemléletes példája a rúd-csukló szerkezetek merevségének gráfelméleti vizsgálata. Ezek a szerkezetek – amelyekben a rudak merevek, a csuklók pedig deformálható kapcsolódási pontok – számos mérnöki alkalmazásban előfordulnak, például hidak, tetőszerkezetek vagy állványrendszerek esetén.

A kérdés az, hogy egy adott szerkezet stabilan megtartja-e alakját, vagy könnyen elmozdítható, deformálható. A fizikai probléma tehát nagyon is kézzelfogható, és ez lehetőséget teremt arra, hogy a mérnökjelölt hallgatók a matematika segítségével oldjanak meg valós, mérnöki természetű problémákat.

A gráfelmélet eszközeivel ezt a mechanikai kérdést absztrakt módon vizsgálhatjuk: a szerkezetet egy gráfként ábrázoljuk, ahol a csúcsok a csuklók, az élek pedig a rudak szerepét töltik be. Az úgynevezett Laman-féle feltételek

segítségével megállapítható, hogy egy kétdimenziós szerkezet merev-e. [Laman 1970]

Ez lehetővé teszi, hogy a szerkezet stabilitását pusztán matematikai számításokkal, a rudak és csuklók elrendezésének ismeretében vizsgáljuk meg anélkül, hogy fizikai modellre lenne szükség. A háromdimenziós szerkezetek merevségének vizsgálata jóval bonyolultabb, jellemző cikkeink például [9] [10]

Ez a megközelítés nemcsak elméleti szépsége miatt értékes, hanem didaktikai szempontból is rendkívül hasznos. A tanulók számára világossá válik, hogyan kapcsolódik össze a matematika az építészet világával.

A gráfelmélet ilyen típusú alkalmazása fejleszti a strukturált gondolkodást, a modellezési készséget, és kiváló lehetőséget ad arra, hogy elmélyítsük a matematikai fogalmak – *például a gráfok, élek, csúcsok, részgráfok* – jelentését és alkalmazhatóságát. A gyakorlatközeli, szemléletes problémák révén a matematika életszerűvé és motiválóvá válik a tanulók számára.

Mivel a mesterképzés matematikájának egyik fontos témaköre a gráfelmélet, a rúd-csukló szerkezetek témakör

beépíthető az Infrastruktúra-építőmérnöki mesterképzés és a Szerkezet-építőmérnök mesterképzés tematikájába is. Hasonló megfontolásból tanítottam a közműhálózatok tervezésének segítségét súlyozott gráfokkal.

Például a gráf csúcsai megfeleltethetők egy közműhálózat csatlakozási pontjainak, az élei pedig két csatlakozási pont közötti vezetékszakasznak. A gráf élein a súlyok lehetnek például a szóban forgó vezetékszakaszok építésének a költségei. Ezt a modellt használva nevezetes gráfelméleti tételekkel, például a Kruskal-algoritmussal tudjuk a költségeket minimalizálni. [Kruskal 1956]

III. A KUTATÁS ÉS A BEMUTATOTT EREDMÉNYEK HATÁSA, VISSZHANGJA

A téma fontossága

A tézispontokhoz kapcsolódó válogatott 10 tudományos cikk közül a legtöbb független hivatkozás a [6]-ra érkezett, szám szerint 11 darab. Ebben a cikkben összefoglaltuk a mérnöki téri intelligencia fejlesztésének lehetőségeit, módszereit, eredményeit a műszaki felsőoktatásban. A hivatkozások mindegyike külföldi, számunkra teljesen ismeretlen személytől származik. (Felbukkan mind a 4 földrész: Dánia, USA, Szingapúr, Líbia.) Ez megerősít minket abban, hogy a mérnöki téri intelligencia fejlesztése mindenhol kiemelt fontosságú, érdemes és kell ennek hatékonyságát tovább növelni.

Hazánkban is spontán kialakult egy közösség, amely a mérnöki téri intelligencia fejlesztésével foglalkozik. Rendszeresen figyelemmel kísérjük egymás kísérleteit, publikációit, konferencia-megjelenéseit. Gyakran hivatkozunk egymás cikkeire, tanulmányozzuk egymás ötleteit. Csak néhány nevet sorolok itt fel (ábécérendben),

és néhány jellemző publikációt: Babály Bernadett, Bölcskei Attila, Budai László, Kárpáti Andrea, Kovács Zsolt, Nagyné Kondor Rita [Bölcskei, Kovács, 2012] [Babály, Budai, Kárpáti, 2014] [Nagyné, Esmailnia, 2022] Egy közös publikáció, amelyet az említett közösség szinte minden tagja jegyez: [Babály & al., 2023]

Új tantárgyak

A szűkebb környezetemben vett egyik eredmény az, hogy a dinamikus geometriával végzett problémamegoldás beépült a tananyagba. Létrejött a „Számítógépes térgeometriai modellezés” megnevezésű, „C” típusú tárgy angol és magyar nyelven is. (Neptun-kódja: SGYMASZ281XXX) A tárgyat építészmérnök, építőmérnök, és menedzser szakos hallgatók; valamint Erasmus keretében nálunk tanuló külföldi vendég-hallgatók egyaránt felvehetik.

A tárgy tematikája nagy vonalakban: „A hallgatók megismerkednek többféle szoftver általános térgeometriai feladatokban történő felhasználásával, azokat építészeti alkalmazási lehetőségekkel szemlélítve. Archimédeszi

poliéderek és csillagpoliéderek modellezése. Poliéder csonkolása. Poliéderek élvázának készítése és deformációja. Testek összege, paraleltestek. Zonoéderek. Térgörbék, kelta minták, csomók, Bezier-görbék. Felületmodellezés. Pakolások. Testek áthatásainak szerkesztése. Keresztmetszetek, vetületek készítése.” (részlet a tantárgyleírásból)

A klasszikus ábrázoló geometria tárgy és a hagyományos műszaki informatika (CAD) tárgy mellett tehát megjelent egy új, szabadon választható tárgy, amely főleg a konstruktív 3D-modellezésre, a dinamikus geometria szoftverekkel végzett térbeli problémák megoldására; a formákkal, a felületekkel és szilárdtestekkel történő manipulációra koncentrál.

A másik változás, hogy építőmérnöki szakon összevonásra kerültek a klasszikus ábrázoló geometria tárgyak és a hagyományos műszaki informatika (CAD) tárgyak, ezzel is hangsúlyozva a mérnöki téri intelligencia komplex fejlesztésének szükségességét. Az új tárgyak nevei Mérnöki ábrázolás 1. és Mérnöki ábrázolás 2., Neptun kódjuk YCXMA1FBNF és YCXMA2FBNF.

Az új tárgyak esetében a hangsúly a papír-ceruzás szerkesztésekről áttevődött a számítógépes modellezésre, összhangban az általam megfogalmazott mérnöki téri intelligencia utolsó két pontjával: „a különböző térbeli problémák konstruktív megoldása, a megoldás dokumentálása 2D-ben és 3D-modellező eszközzel (CAD programmal)” valamint „parametrikus 3D formák és objektumok kreatív létrehozása, dokumentálása 3D-képes szoftverrel.”

Gyakorlatközeli, színes, élményalapú, problémacentrikus térgeometria oktatás

Az V. pontban felsorolt publikációk közül a második legtöbb független hivatkozás az [5]-re vonatkozik, szám szerint 7 darab. Ebben a cikkben konkrét példákkal illusztráltam a dinamikus geometria programok alkalmazhatóságát téri problémák megoldása során.

A problémacentrikus oktatás lehetőséget teremt arra, hogy a tanulók valós életből vett problémákon keresztül alkalmazzák a megszerzett geometriai ismereteket. Például egy épület megtervezése során felmerülő kérdések

– mint a stabilitás, a térkihasználás vagy az anyagszükséglet kiszámítása – olyan helyzeteket kínálnak, amelyekben a térgeometria közvetlen gyakorlati haszná válik nyilvánvalóvá. A hallgatók így nemcsak megtanulják a geometriai elveket, hanem azt is megtapasztalják, hogyan lehet azokat kreatívan és hatékonyan alkalmazni a mindennapi életben.

A cikkekre hivatkozók láthatóan felhasználták a cikkben leírtakat, ötleteket merítettek belőle, és további szép példákkal demonstrálták ezeknek a szoftvereknek az előnyeit és használhatóságát a mérnökképzésben.

Ennek az a jelentősége, hogy amelyik oktató szeretné a konzultációit színesebbé, gyakorlatközelibbé tenni, annak elegendő számú példa áll a rendelkezésére ennek megvalósításához.

IV. IRODALMI HIVATKOZÁSOK LISTÁJA

- [Ambrus 2004] Ambrus András: *Bevezetés a matematika-didaktikába* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest (2004)
- [Babály & al., 2023] Babály Bernadett, Bölcskei Attila, Budai László, Kárpáti Andrea & Katona János (2013) *Virtual learning environments and online assessment of spatial abilities* In: Tomislav, Došlić; Ema, Jurkin (szerk.) 17th Scientific-Professional Colloquium on Geometry and Graphics: Abstracts Zágráb, Horvátország: Croatian Society for Geometry and Graphics.
- [Babály, Budai, Kárpáti, 2014] Babály Bernadett, Budai László & Kárpáti Andrea (2014) *Developmental Assessment of Spatial Abilities Through Interactive, Online 2D and Virtual 3D Tasks*. The International Journal Of Arts Education 12: (2) pp. 94-124.
- [Bölcskei, Kovács, 2012] Bölcskei Attila, Kovács Zsolt (2012) *Az Ybl Miklós Kar építész hallgatóinak térszemlélet mérése MCT segítségével*, Debreceni Műszaki Közlemények 2012:(2) pp. 35-44.
- [Csánk, Göndöcs 1966] Csánk István, Göndöcs László: *Az ábrázoló geometria módszertanának néhány kérdése* Tankönyvkiadó, Budapest (1966)

- [Kárteszi 1972] Kárteszi Ferenc: *A geometriatanítás korszerűsítéséről* Tankönyvkiadó, Budapest (1972)
- [Kruskal, 1956] Joseph Kruskal: *On the shortest spanning subtree and the traveling salesman problem*. In: Proceedings of the American Mathematical Society, 7, 1956, pp. 48–50
- [Laman, 1970] Laman, G., (1970) *On graphs and rigidity of plane skeletal structures*, J. Engineering Math. 4, pp. 331-340.
- [Fitos, 1984] Fitos László: *Analóg tételek és feladatok a sík- és térgeometriában* Tankönyvkiadó, Budapest 1984.
- [Fried & Simonovits, 2005] Fried Katalin, Simonovits Miklós: *A problémamegoldás számítógépes iskolája*. Typotex Kiadó, Budapest, 2005
- [Nagy, 2006] Nagy Lászlóné: *Az analógiás gondolkodás fejlesztése*. Műszaki Kiadó, Budapest (2006)
- [Nagyné, Esmailnia, 2022] Nagyné Kondor R., Esmailnia, S.: *Development of spatial ability extra tasks (SAET): problem solving with spatial intelligence*. Qual. Quant. 56, 3751-3768, 2022.
- [Nievergelt, Farrar & Reingold, 1977] Nievergelt, J., Farrar, J. & Reingold, E.: *Matematikai problémák megoldásának számítógépes módszerei*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1977)

[Pólya, 1985] Pólya György: *A gondolkodás iskolája*
Akkord Kiadó Gondolat Könyvkiadó, Budapest
(1985)

[Séra, Kárpáti & Gulyás, 2002] Séra László, Kárpáti
Andrea & Gulyás János: *A térszemlélet* Comenius Kiadó
Pécs (2002)

[Skemp 2005] Richard R. Skemp: *A matematikatanulás
pszichológiája* Edge 2000 Kiadó, Budapest (2005)

[Vermes, 2005] Vermes Imre: *Geometria* Műegyetemi
Kiadó, Budapest (2005)

V. A TÉZISPONTOKHOZ KAPCSOLÓDÓ TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

- [1] Katona, János: *A geometriához kapcsolódó kompetenciák fejlesztésének egyre bővülő eszköztára*
Szakoktatás 2009.7 pp. 8-10. (2009)
- [2] Bölcskei Attila; Katona János: *Efforts in Descriptive Geometry Education and Their Result*. In: Ratko, Obradovic; Radovan, Stulic (ed.) 3rd International Scientific Conference moNGeometrija Novi Sad, Szerbia: University of Novi Sad, Faculty of Technical Sciences (2012) pp. 381-389.
- [3] Katona János: *Dynamical Images in Teaching Geometry* In: Stettner, Eleonóra; Klingné, Takács Anna; Barna, Róbert (szerk.) Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók XXXIX. Országos Konferenciája [Conference MAFIOK XXXIX.] Kaposvár, Magyarország, Kaposvári Egyetem pp. 121-126. (2015)
- [4] Bölcskei Attila; Katona János: *Experiences in the Development of Digital Learning Environment*. Studies of the University of Zilina Mathematical Series 27 pp. 3-10. (2015)
- [5] Katona János: *Solving 2 and 3-dimensional problems with help of dynamic geometry software*. In É. Vásárhelyi, Beitrage zum Mathematikunterricht. Münster: Martin Stein Verlag. (2008)

- [6] Katona János, Nagy Kem Gyula: *The CAD 3D course improves students' spatial skills in the technology and design education* Ybl Journal of Built Environment 7.1 pp. 26-37. (2019)
- [7] Katona János: *Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens an technischen Universitäten* In: Éva, Vásárhelyi; Johann, Sjuts (szerk.) Theoretische und empirische Analysen zum geometrischen Denken: Mathematiklernen und-lehren in Ungarn 3. Münster, Németország: WTM-Verlag. pp. 153-160. (2021)
- [8] Katona János, Molnár Emil: *Visibility of the higher-dimensional central projection into the projective sphere. Acta Mathematica Hungarica*, 123., pp. 291-309. (2009)
- [9] Katona János, Nagy Gyula: *Connectivity for rigidity. Studies of the University of Zilina Mathematical Series*, 24., pp. 59-64. (2010)
- [10] Katona János, Nagy Kem Gyula: *Braced grid framework rigidity characterization* In: Iványi, P; Kruis, J; Topping, B.H.V. (edit.) *Proceedings of the Seventeenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing* Edinburgh, Egyesült Királyság / Skócia: Civil-Comp Press 626 p. pp. 1-11. (2023)

VI. TOVÁBBI TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

- [11] Takács, Anna Mária ; Katona, János ; Baják, Szabolcs ; Nagy Kem, Gyula *Constrained Cubic Grid Rigidity Decision with Directed Graph and Applications* Journal of Optimization Theory and Applications 205 : 2 Paper: 25 , 23 p. (2025)
- [12] Katona, János ; Nagy, Kem Gyula *Gyakorlatközelí matematika feladatok mérnökjelölt hallgatók számára* In: Végh, Attila (szerk.) INFIMUM 2024 : Informatika, Fizika, Matematika Konferencia Kecskemét, Magyarország : Neumann János Egyetem (2024) 47 p. p. 20
- [13] Katona, János ; Nagy, Kem Gyula *A Covid-generáció felzárkóztatása* GRADUS 10 : 2 Paper: 2023.2.CSC.017 , 6 p. (2023)
- [14] Katona, János ; Nagy, Kem Gyula *Az online matematika vizsgák tapasztalatai* In: Ország, Adrienn; Baják, Szabolcs (szerk.) I. Csernyák László konferencia közleményei Budapest, Magyarország : Budapesti Gazdasági Egyetem (BGE) (2023) pp. 144-151. , 8 p.
- [14] Nagy, Kem Gyula ; Katona, János *Problémamegoldás a felsőoktatásban* GRADUS 10 : 2 Paper: 2023.2.CSC.019 , 6 p. (2023)

- [15] Katona, János ; Takács, Anna ; Nagy, Kem Gyula
Matematikai versenyeink és a problémamegoldó gondolkodás In: Temesvári, Zsolt; Wüthrich, Tibor; Molnár, György (szerk.) XXXVIII. Kandó Konferencia 2022 - Kiadvány kötet Budapest, Magyarország : Óbudai Egyetem, Kandó Kálmán Villamosmérnöki Kar (2022) 419 p. pp. 355-364. , 10 p.
- [16] Katona, János *Matematika tanítás-tanulás okostelefonnal* In: Molnár, György; Buda, András (szerk.) OKTATÁS-INFORMATIKA-PEDAGÓGIA KONFERENCIA 2020 Debrecen, Magyarország : Debreceni Egyetem Bölcsészettudományi Kar, Nevelés- és Művelődéstudományi Intézet (2020) pp. 27-27. , 1 p.
- [17] Katona, János ; Talata, István *Dynamic Demonstrations of Definitions, Theorems and Proofs in Mathematics Education: Definíciók, tételek és bizonyítások dinamikus szemléltetése a matematikaoktatásban* In: Dorkota, Lajos; Matolcsi, Renáta (szerk.) IV. East-West Cohesion International Scientific Conference : Abstract volume of an international scientific conference (2019) pp. 23-23. , 1 p.
- [18] Katona, János *Tanítás-tanulás oktatóvideókkal: tapasztalatok a műszaki felsőoktatásban* In: Hülber, László; Buda, András; Ollé, János (szerk.) Oktatás-

Informatika-Pedagógia konferencia Debrecen,
Magyarország : Kapitális Nyomda (2019) 59 p. p. 34
, 1 p.

- [19] Katona, János *Számítógépes intelligenciával támogatott matematika oktatás: Computer Intelligence Supported Mathematics Education* GRADUS 5 : 2 pp. 343-347. , 5 p. (2018)
- [20] Katona, János *Gyakorlati térgeometriai problémák elemzése és megoldása a mérnökképzésben* In: Talata, István (szerk.) *Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók 41. Országos Konferenciája : MAFIOK 2017 Budapest, Magyarország : Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar* (2017) pp. 135-138. , 4 p.
- [21] Katona, János *Online matematikai szoftvercsomagok összehasonlítása: Online Computer Algebra Systems – a Comparison* In: Hajnal, Éva; Orosz, Tamás Gábor (szerk.) *Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók XL. Országos Konferenciája CD* Székesfehérvár, Magyarország : Óbudai Egyetem, Alba Regia Műszaki Kar (2016) pp. 132-137. , 6 p.
- [22] Katona, János *Térgeometriai problémák megoldása 3D modellező eszközökkel* In: Bölcskei, Attila; Nagy, Gyula (szerk.) *GeoGra : 2012. 01. 20-21.: SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Kar Budapest, Magyarország : (2012) 20 p. p. 3*